CALCUL INTÉGRAL.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES.

Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = X$, on désigne par x_1, x_2, ..., x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$(1) \qquad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \ldots, \quad X - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \qquad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment : 1° du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X - x_0$; 2° des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites

et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X - x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$S = (X - x_0) f(x_0). \tag{3}$$

Lorsque, au contraire, on prend les expressions (1) pour éléments de la différence $X - x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des éléments multipliée par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_{n-1})$$

[*voir*, dans les préliminaires du *Cours d'Analyse*, le corollaire du théorème III ([1])]. D'ailleurs, ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la septième Leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

$$S = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{4}$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des éléments de $X - x_0$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux éléments. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ par

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 28.

une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2 - x_1) f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ & + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$\begin{aligned} & f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0, \\ & f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

on en tirera

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \end{aligned}\right.$$

puis, en développant les produits,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ & \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, si les éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ ont

des valeurs numériques très petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1$, ..., $\pm\varepsilon_{n-1}$ différera très peu de zéro, et par suite il en sera de même de la somme

$$\pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\ldots\pm\varepsilon_{n-1}(\mathrm{X}-x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $\mathrm{X}-x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altérera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les éléments de la différence $\mathrm{X}-x_0$ ont des valeurs numériques très petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à la fois deux modes de division de la différence $\mathrm{X}-x_0$, dans chacun desquels les éléments de cette différence aient de très petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi que chaque élément, soit du premier, soit du second mode se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très peu la valeur de S en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $\mathrm{X}-x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un

accroissement fini attribué à la variable x, les différents termes dont se compose la valeur S, tels que les produits

$$(x_1 - x_0) f(x_0), \quad (x_2 - x_1) f(x_1), \quad \ldots$$

seront tous compris dans la formule générale

$$h f(x) = f(x)\, dx, \tag{8}$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad h = x_1 - x_0,$$

puis

$$x = x_1 \quad \text{et} \quad h = x_2 - x_1, \quad \ldots.$$

On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (8), ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ, en écrivant

$$S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x) \Delta x. \tag{9}$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S, tandis que les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int h f(x)$ ou $\int f(x)\, dx$, dans laquelle la lettre $\int$, substituée à la lettre Σ, indique, non plus une somme de produits semblables à l'expression (8), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx, \quad \int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}. \tag{10}$$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par

une quantité constante a, on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X - x_0$,

$$S = a(X - x_0),$$

et l'on en conclut

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0). \tag{11}$$

Si, dans cette dernière formule, on pose $a = 1$, on en tirera

$$\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0. \tag{12}$$

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

FORMULES POUR LA DÉTERMINATION DES VALEURS EXACTES OU APPROCHÉES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

D'après ce qui a été dit dans la dernière Leçon, si l'on divise $X - x_0$ en éléments infiniment petits $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$, la somme

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \tag{1}$$

convergera vers une limite représentée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Des principes sur lesquels nous avons fondé cette proposition, il résulte qu'on parviendrait encore à la même limite si la valeur de S, au lieu d'être déterminée par l'équation (1), était déduite de formules semblables aux équations (5) et (6) (vingt et unième Leçon), c'est-à-dire si l'on supposait

$$\left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ & + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned}\right. \tag{3}$$

θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1} désignant des nombres quelconques inférieurs à l'unité, ou bien

$$\left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ε_0, ε_1, ..., ε_{n-1} désignant des nombres assujettis à s'évanouir avec les éléments de la différence $X - x_0$. La première des deux formules

précédentes se réduit à l'équation (1), lorsqu'on prend

$$\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_{n-1} = 0.$$

Si l'on fait, au contraire,

$$\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_{n-1} = 1,$$

on trouvera

$$(5)\qquad S = (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(X).$$

Lorsque, dans cette dernière formule, on échange entre elles les deux quantités x_0, X, ainsi que tous les termes placés à égales distances des deux extrêmes dans la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X, on obtient une nouvelle valeur de S égale, mais opposée de signe, à celle que fournit l'équation (1). La limite vers laquelle convergera cette nouvelle valeur de S devra donc être égale, mais opposée de signe, à l'intégrale (2), de laquelle on la déduira par l'échange mutuel des deux quantités x_0, X. On aura donc généralement

$$(6)\qquad \int_X^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^X f(x)\,dx.$$

On emploie fréquemment les formules (1) et (5) dans la recherche des valeurs approchées des intégrales définies. Pour plus de simplicité, on suppose ordinairement que les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X comprises dans ces formules sont en progression arithmétique. Alors les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent tous égaux à la fraction $\frac{X - x_0}{n}$; et, en désignant cette fraction par i, on trouve que les équations (1) et (5) se réduisent aux deux suivantes :

$$(7)\qquad S = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - 2i) + f(X - i)],$$

$$(8)\qquad S = i[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - 2i) + f(X - i) + f(X)].$$

On pourrait supposer encore que les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X forment une progression géométrique dont la raison diffère très peu de l'unité. En adoptant cette hypothèse et faisant $\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$, on tirera des formules (1) et (5) deux nouvelles valeurs de S, dont la

première sera

$$(9)\qquad S=\alpha\left\{x_0 f(x_0)+x_0(1+\alpha)f[x_0(1+\alpha)]+\ldots+\frac{X}{1+\alpha}f\left(\frac{X}{1+\alpha}\right)\right\}.$$

Il est essentiel d'observer que, dans plusieurs cas, on peut déduire des équations (7) et (9), non seulement des valeurs approchées de l'intégrale (2), mais aussi sa valeur exacte ou $\lim S$. On trouvera, par exemple,

$$(10)\qquad \int_{x_0}^{X} x\,dx=\lim\frac{(X-x_0)(X+x_0-i)}{2}=\lim\frac{X^2-x_0^2}{2+\alpha}=\frac{X^2-x_0^2}{2},$$

$$(11)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X} A^x\,dx=\lim\frac{i(A^X-A^{x_0})}{A^i-1}=\frac{A^X-A^{x_0}}{1A},\\[2ex] \displaystyle\int_{x_0}^{X} e^x\,dx=e^X-e^{x_0},\end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X} x^a\,dx=\lim\frac{\alpha(X^{a+1}-x_0^{a+1})}{(1+\alpha)^{a+1}-1}=\frac{X^{a+1}-x_0^{a+1}}{a+1},\\[2ex] \displaystyle\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x}\quad=\lim n\alpha=1\frac{X}{x_0},\end{cases}$$

la dernière équation devant être restreinte au cas où les quantités x_0, X sont affectées du même signe. Ajoutons qu'il est souvent facile de ramener la détermination d'une intégrale définie à celle d'une autre intégrale de même espèce. Ainsi, par exemple, on tirera de la formule (1)

$$(13)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X} a\,\varphi(x)\,dx &=\lim a[(x_1-x_0)\varphi(x_0)+\ldots+(X-x_{n-1})\varphi(x_{n-1})]\\[2ex] &\displaystyle=a\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx,\end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx &=\lim[(x_1-x_0)f(x_0+a)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1}+a)]\\[2ex] &\displaystyle=\int_{x_0+a}^{X+a}f(x)\,dx,\end{cases}$$

$$(15)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x-a)\,dx=\int_{x_0-a}^{X-a}f(x)\,dx,\qquad \int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x-a}=\int_{x_0-a}^{X-a}\frac{dx}{x}=1\frac{X-a}{x_0-a},$$

la dernière équation devant être restreinte au cas où $x_0 - a$ et $X - a$ sont des quantités affectées du même signe. De plus, on tirera de la formule (8), en posant $x_0 = 0$ et remplaçant $f(x)$ par $f(X-x)$,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^X f(X-x)\,dx &= \lim i[f(X-i)+f(X-2i)+\ldots+f(2i)+f(i)+f(0)] \\ &= \int_0^X f(x)\,dx; \end{aligned}\right.$$

puis on en conclura, en ayant égard à l'équation (14),

$$(17)\quad \int_0^{X-x_0} f(X-x)\,dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0)\,dx = \int_{x_0}^X f(x)\,dx.$$

Enfin, si dans la formule (9) on pose

$$f(x) = \frac{1}{x\,lx} \qquad \text{et} \qquad l(1+\alpha) = \beta,$$

on en tirera

$$(18)\quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x\,lx} = \lim \beta\left(\frac{1}{lx_0} + \frac{1}{lx_0+\beta} + \ldots + \frac{1}{lX-\beta}\right)\frac{e^\beta-1}{\beta} = \int_{lx_0}^{lX}\frac{dx}{x} = l\frac{lX}{lx_0},$$

les quantités x_0, X devant être positives et toutes deux supérieures ou toutes deux inférieures à l'unité.

Une remarque importante à faire, c'est que les formes sous lesquelles se présente la valeur de S, dans les équations (4) et (5) de la Leçon précédente, conviennent également à l'intégrale (2). En effet, ces équations subsistant l'une et l'autre, tandis que l'on subdivise ou la différence $X - x_0$, ou les quantités $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$ en éléments infiniment petits, seront encore vraies à la limite, en sorte qu'on aura

$$(19)\quad \int_{x_0}^X f(x)\,dx = (X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)]$$

et

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x_0}^X f(x)\,dx = (x_1-x_0)\,&f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)] \\ &+ (x_2-x_1)\,f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]+\ldots \\ &+ (X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})], \end{aligned}\right.$$

$\theta, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ désignant des nombres inconnus, mais tous inférieurs à l'unité. Si, pour plus de simplicité, on suppose les quantités $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ égales entre elles, alors, en faisant $i = \frac{X - x_0}{n}$, on trouvera

$$(21)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = i[f(x_0 + \theta_0 i) + f(x_0 + i + \theta_1 i) + \ldots + f(X - i + \theta_{n-1} i)].$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, le second membre de la formule (21) reste évidemment compris entre les deux valeurs de S fournies par les équations (7) et (8), valeurs dont la différence est $\pm i[f(X) - f(x_0)]$. Par conséquent, dans cette hypothèse, en prenant la demi-somme de ces deux valeurs, ou l'expression

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} & i[\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots \\ & \qquad + f(X - 2i) + f(X - i) + \tfrac{1}{2} f(X)], \end{aligned} \right.$$

pour valeur approchée de l'intégrale (21), on commet une erreur plus petite que la demi-différence $\pm i[\frac{1}{2} f(X) - \frac{1}{2} f(x_0)]$.

Exemple. — Si l'on suppose

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x_0 = 0, \qquad X = 1, \qquad i = \tfrac{1}{4},$$

l'expression (22) deviendra

$$\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{16}{17} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{16}{25} + \tfrac{1}{4}) = 0{,}78\ldots.$$

En conséquence, 0,78 est la valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$. L'erreur commise dans ce cas ne pourra surpasser $\frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$. Elle sera effectivement au-dessous de $\frac{1}{100}$, comme nous le verrons plus tard.

Lorsque la fonction $f(x)$ est tantôt croissante et tantôt décroissante entre les limites $x = x_0$, $x = X$, l'erreur que l'on commet, en prenant une des valeurs de S fournies par les équations (7) et (8) pour valeur approchée de l'intégrale (2), est évidemment inférieure au produit de

$ni = X - x_0$ par la plus grande valeur numérique que puisse obtenir la différence

$$(23) \qquad f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \, f'(x + \theta \, \Delta x)$$

quand on y suppose x comprise entre les limites x_0, X et Δx entre les limites o, i. Donc, si l'on appelle k la plus grande des valeurs numériques que reçoit $f(x)$, tandis que x varie depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, l'erreur commise sera certainement renfermée entre les limites

$$-ki(X - x_0), \quad +ki(X - x_0).$$

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

DÉCOMPOSITION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE EN PLUSIEURS AUTRES. INTÉGRALES DÉFINIES IMAGINAIRES. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES. DÉCOMPOSITION DE LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$ EN DEUX FACTEURS DONT L'UN CONSERVE TOUJOURS LE MÊME SIGNE.

Pour diviser l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{1}$$

en plusieurs autres de même espèce, il suffit de décomposer en plusieurs parties ou la fonction sous le signe $\int$, ou la différence $X - x_0$. Supposons d'abord

$$f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \ldots;$$

on en conclura

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_0) f(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\
= \;&(x_1 - x_0) \varphi(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1}) \varphi(x_{n-1}) \\
&+ (x_1 - x_0) \chi(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1}) \\
&+ (x_1 - x_0) \psi(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1}) \psi(x_{n-1}) + \ldots,
\end{aligned}$$

puis, en passant aux limites,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx + \ldots.$$

De cette dernière formule, jointe à l'équation (13) (vingt-deuxième Leçon), on tirera, en désignant par u, v, w, ... diverses fonctions de

la variable x, et par a, b, c, ... des quantités constantes

(2) $$\int_{x_0}^{X}(u+v+w+\ldots)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\int_{x_0}^{X}v\,dx+\int_{x_0}^{X}w\,dx+\ldots,$$

(3) $$\int_{x_0}^{X}(u+v)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\int_{x_0}^{X}v\,dx,\qquad \int_{x_0}^{X}(u-v)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx-\int_{x_0}^{X}v\,dx,$$

(4) $$\int_{x_0}^{X}(au+bv+cw+\ldots)\,dx=a\int_{x_0}^{X}u\,dx+b\int_{x_0}^{X}v\,dx+c\int_{x_0}^{X}w\,dx+\ldots.$$

Lorsqu'on étend la définition que nous avons donnée de l'intégrale (1) au cas où la fonction $f(x)$ devient imaginaire, l'équation (4) subsiste pour des valeurs imaginaires des constantes a, b, c, ... On a, par suite,

(5) $$\int_{x_0}^{X}(u+v\sqrt{-1})\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\sqrt{-1}\int_{x_0}^{X}v\,dx.$$

Supposons maintenant que, après avoir divisé la différence $X-x_0$ en un nombre fini d'éléments représentés par x_1-x_0, x_2-x_1, ..., $X-x_{n-1}$, on partage chacun de ces éléments en plusieurs autres dont les valeurs numériques soient infiniment petites, et que l'on modifie en conséquence la valeur de S fournie par l'équation (1) (vingt-deuxième Leçon). Le produit $(x_1-x_0)f(x_0)$ se trouvera remplacé par une somme de produits semblables qui aura pour limite l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$. De même, les produits $(x_2-x_1)f(x_1)$, ..., $(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$ seront remplacés par des sommes qui auront pour limites respectives les intégrales définies $\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$, ..., $\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx$. D'ailleurs, en réunissant les différentes sommes dont il s'agit, on obtiendra pour résultat une somme totale dont la limite sera précisément l'intégrale (1). Donc, puisque la limite d'une somme de plusieurs quantités est toujours équivalente à la somme de leurs limites, on aura généralement

(6) $$\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx.$$

Il est essentiel de se rappeler que l'on doit ici attribuer au nombre entier n une valeur finie. Lorsqu'entre les limites x_0, X on interpose une seule valeur de x représentée par ξ, l'équation (6) se réduit à

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Il est facile de prouver que les équations (6) et (7) subsisteraient dans le cas même où quelques-unes des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi$ cesseraient d'être comprises entre les limites x_0, X, et dans celui où les différences $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}, \xi - x_0, X - \xi$ ne seraient plus des quantités de même signe. Admettons, par exemple, que les différences $\xi - x_0$, $X - \xi$ soient de signes contraires. Alors, suivant qu'on supposera x_0 comprise entre ξ et X, ou bien X comprise entre x_0 et ξ, on trouvera

$$\int_{\xi}^{X} f(x)\,dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

ou bien

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Or, la formule (6) de la vingt-deuxième Leçon suffit pour montrer comment les deux équations que nous venons d'obtenir s'accordent avec l'équation (7). Cette dernière étant établie dans toutes les hypothèses, on pourra en déduire directement l'équation (6), quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

On a vu, dans la Leçon précédente, combien il était aisé de trouver, non seulement des valeurs approchées de l'intégrale (1), mais aussi les limites des erreurs commises, lorsque la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$. Quand cette condition cesse d'être satisfaite, on peut évidemment, à l'aide de la formule (6), décomposer l'intégrale (1) en plusieurs autres, pour chacune desquelles la même condition soit remplie.

Concevons à présent que, la limite X étant supérieure à x_0, et la

fonction $f(x)$ étant positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, x, y désignent des coordonnées rectangulaires, et A la surface comprise d'une part entre l'axe des x et la courbe $y = f(x)$, d'autre part entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$. Cette surface, qui a pour base la longueur $X - x_0$ comptée sur l'axe des x, sera une moyenne entre les aires des deux rectangles construits sur la base $X - x_0$, avec des hauteurs respectivement égales à la plus petite et à la plus grande des ordonnées élevées par les différents points de cette base. Elle sera donc équivalente à un rectangle construit sur une ordonnée moyenne représentée par une expression de la forme $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; en sorte qu'on aura

$$(8) \qquad A = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Si l'on divise la base $X - x_0$ en éléments très petits, $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$, la surface A se trouvera divisée en éléments correspondants dont les valeurs seront données par des équations semblables à la formule (8). On aura donc encore

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} A = {} & (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned} \right.$$

θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1} désignant des nombres inférieurs à l'unité. Si dans cette dernière équation on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques des éléments de $X - x_0$, on en tirera, en passant aux limites,

$$(10) \qquad A = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Exemples. — Appliquer la formule (10) aux courbes $y = ax^2$, $xy = 1$, $y = e^x$, ...

En terminant cette Leçon, nous allons faire connaître une propriété remarquable des intégrales définies réelles. Si l'on suppose $f(x) = \varphi(x)\chi(x)$, $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ étant deux fonctions nouvelles qui restent l'une et l'autre continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et

dont la seconde conserve toujours le même signe entre ces limites, la valeur de S donnée par l'équation (1) de la vingt-deuxième Leçon deviendra

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0)\varphi(x_0)\chi(x_0) \\ & + (x_2 - x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\varphi(x_{n-1})\chi(x_{n-1}), \end{aligned}\right.$$

et sera équivalente à la somme

$$(x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1})$$

multipliée par une moyenne entre les coefficients $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_{n-1})$, ou, ce qui revient au même, par une quantité de la forme $\varphi(\xi)$, ξ désignant une valeur de x comprise entre x_0 et X. On aura donc

$$(12)\quad S = [(x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1})]\varphi(\xi),$$

et l'on en conclura, en cherchant la limite de S,

$$(13)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx,$$

ξ désignant toujours une valeur de x comprise entre x_0 et X.

Exemples. — Si l'on prend successivement

$$\chi(x) = 1, \qquad \chi(x) = \frac{1}{x}, \qquad \chi(x) = \frac{1}{x - a},$$

on obtiendra les formules

$$(14)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X} dx = (X - x_0)f(\xi),$$

$$(15)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \xi f(\xi)\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\,\mathrm{l}\frac{X}{x_0},$$

$$(16)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\xi - a)f(\xi - a)\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x - a} = (\xi - a)\,\mathrm{l}\frac{X - a}{x_0 - a},$$

dont la première coïncide avec l'équation (19) de la vingt-deuxième Leçon. Ajoutons que le rapport $\frac{X}{x_0}$ dans la seconde formule, et le rapport $\frac{X-a}{x_0-a}$ dans la troisième, doivent être censés positifs.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES DONT LES VALEURS SONT INFINIES OU INDÉTERMINÉES. VALEURS PRINCIPALES DES INTÉGRALES INDÉTERMINÉES.

Dans les Leçons précédentes, nous avons démontré plusieurs propriétés remarquables de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \tag{1}$$

mais en supposant : 1° que les limites x_0, X étaient des quantités finies, 2° que la fonction $f(x)$ demeurait finie et continue entre ces mêmes limites. Lorsque ces deux espèces de conditions se trouvent remplies, alors, en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre les valeurs extrêmes x_0, X, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Quand les valeurs interposées se réduisent à deux, l'une très peu différente de x_0, et représentée par ξ_0, l'autre très peu différente de X, et représentée par ξ, l'équation (2) devient

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(X)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx,$$

et peut s'écrire comme il suit :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\xi_0 - x_0)\,f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + (X-\xi)\,f[\xi + \theta(X-\xi)],$$

θ_0, θ désignant deux nombres inférieurs à l'unité. Si, dans la dernière

formule, on fait converger ξ_0 vers la limite x_0, et ξ vers la limite X, on en tirera, en passant aux limites,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Lorsque les valeurs extrêmes x_0, X deviennent infinies, ou lorsque la fonction $f(x)$ ne reste pas finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on ne peut plus affirmer que la quantité désignée par S dans les Leçons précédentes ait une limite fixe, et par suite on ne voit plus quel sens on doit attacher à la notation (1) qui servait à représenter généralement la limite de S. Pour lever toute incertitude et rendre à la notation (1), dans tous les cas, une signification claire et précise, il suffit d'étendre par analogie les équations (2) et (3) aux cas même où elles ne peuvent plus être rigoureusement démontrées. C'est ce que nous allons faire voir en quelques exemples.

Considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx. \tag{4}$$

Si l'on désigne par ξ_0 et ξ deux quantités variables, dont la première converge vers la limite $-\infty$, et la seconde vers la limite ∞, on tirera de la formule (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x\,dx = \lim(e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty.$$

Ainsi, l'intégrale (4) a une valeur infinie positive.

Considérons en second lieu l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \tag{5}$$

prise entre deux limites dont l'une est infinie, tandis que l'autre rend infinie la fonction sous le signe $\int$, savoir $\frac{1}{x}$. En désignant par ξ_0 et ξ deux quantités positives, dont la première converge vers la limite

zéro, et la seconde vers la limite ∞, on tirera de la formule (3)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim \mathrm{l}\frac{\xi}{\xi_0} = \mathrm{l}\frac{\infty}{0} = \infty.$$

Ainsi l'intégrale (5) a encore une valeur infinie positive.

Il est essentiel d'observer que, si la variable x et la fonction $f(x)$ restent finies l'une et l'autre pour une des limites de l'intégrale (1), on pourra réduire la formule (3) à l'une des deux suivantes :

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{X} f(x)\,dx.$$

On tirera en particulier de ces dernières

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^0 - e^{-\infty} = 1, & \displaystyle\int_0^\infty e^x\,dx = e^\infty - e^0 = \infty, \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,0 = -\infty, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{1}{0} = \infty. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

dans laquelle la fonction sous le signe $\int$, savoir $\frac{1}{x}$, devient infinie pour la valeur particulière $x = 0$ comprise entre les limites $x = -1$, $x = +1$. On tirera de la formule (2)

$$(9)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty.$$

La valeur de l'intégrale (8) paraît donc indéterminée. Pour s'assurer qu'elle l'est effectivement, il suffit d'observer que, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par μ, ν deux constantes positives, mais arbitraires, on aura, en vertu des formules (6),

$$(10)\qquad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim \int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Par suite, la formule (9) deviendra

$$(11)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim\left(\int_{-1}^{-\varepsilon\mu}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon\nu}^{1}\frac{dx}{x}\right)=\lim\left(\mathrm{l}\,\varepsilon\mu+\mathrm{l}\,\frac{1}{\varepsilon\nu}\right)=\mathrm{l}\,\frac{\mu}{\nu},$$

et fournira pour l'intégrale (8) une valeur complètement indéterminée, puisque cette valeur sera le logarithme népérien de la constante arbitraire $\frac{\mu}{\nu}$.

Concevons à présent que la fonction $f(x)$ devienne infinie entre les limites $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, pour les valeurs particulières de x représentées par $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \ldots, \mu_m, \nu_m$ des constantes positives, mais arbitraires, on tirera des formules (2) et (3)

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx\\ &=\lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx\right].\end{aligned}\right.$$

Si les limites x_0, X se trouvaient elles-mêmes remplacées par $-\infty$ et $+\infty$, on aurait

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx\right],$$

μ, ν désignant deux nouvelles constantes positives, mais arbitraires. Ajoutons que, dans le second membre de la formule (13), on devra rétablir X à la place de $\frac{1}{\varepsilon\nu}$ ou x_0 à la place de $-\frac{1}{\varepsilon\mu}$, si des deux quantités x_0, X une seule devient infinie. Dans tous les cas, les valeurs des intégrales

$$(14)\qquad \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

déduites des équations (12) et (13), pourront être, suivant la nature de la fonction $f(x)$, ou des quantités infinies, ou des quantités finies

et déterminées, ou des quantités indéterminées qui dépendront des valeurs attribuées aux constantes arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m.

Si, dans les formules (12) et (13), on réduit à l'unité les constantes arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m, on trouvera

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right], \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right]. \tag{16}$$

Toutes les fois que les intégrales (14) deviennent indéterminées, les équations (15) et (16) ne fournissent pour chacune d'elles qu'une valeur particulière à laquelle nous donnerons le nom de *valeur principale*. Si l'on prend pour exemple l'intégrale (8) dont la valeur générale est indéterminée, on reconnaîtra que sa valeur principale se réduit à zéro.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES SINGULIÈRES.

Concevons qu'une intégrale relative à x, et dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ est désignée par $f(x)$, soit prise entre deux limites infiniment rapprochées d'une certaine valeur particulière a attribuée à la valeur x. Si cette valeur a est une quantité finie, et si la fonction $f(x)$ reste finie et continue dans le voisinage de $x=a$, alors, en vertu de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon), l'intégrale proposée sera sensiblement nulle; mais elle pourra obtenir une valeur finie différente de zéro, ou même une valeur infinie, si l'on a

$$a=\pm\infty \qquad \text{ou bien} \qquad f(a)=\pm\infty.$$

Dans ce dernier cas, l'intégrale en question deviendra ce que nous appellerons une *intégrale définie singulière*. Il sera ordinairement facile d'en calculer la valeur à l'aide des formules (15) et (16) de la vingt-troisième Leçon, ainsi qu'on va le voir.

Soient ε un nombre infiniment petit et μ, ν deux constantes positives, mais arbitraires. Si a est une quantité finie, mais prise parmi les racines de l'équation $f(x)=\pm\infty$, et si f désigne la limite vers laquelle converge le produit $(x-a)f(x)$, tandis que son premier facteur converge vers zéro, les valeurs des intégrales singulières

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx, \quad \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$$

seront à très peu près [en vertu de la formule (16), vingt-troisième Leçon]

$$(1)\qquad \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\mu,$$

$$(2)\qquad \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{\nu}.$$

Si l'on suppose au contraire $a = \pm\infty$, en appelant f la limite vers laquelle converge le produit $xf(x)$, tandis que la variable x converge vers la limite $\pm\infty$, on aura sensiblement [vingt-troisième Leçon, équation (15)]

$$(3)\qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\mu,$$

$$(4)\qquad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{\nu}.$$

Il est essentiel d'observer que la limite du produit $(x-a)f(x)$ ou $xf(x)$ dépend quelquefois du signe de son premier facteur. Ainsi, par exemple, le produit $x(x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ converge vers la limite $+1$ ou -1, suivant que son premier facteur, en s'approchant de zéro, reste positif ou négatif. Il suit de cette remarque que la quantité désignée par f change quelquefois de valeur dans le passage de l'équation (1) à l'équation (2), ou de l'équation (3) à l'équation (4).

La considération des intégrales définies singulières fournit le moyen de calculer la valeur générale d'une intégrale indéterminée, lorsqu'on connaît sa valeur principale. En effet, soit

$$(5)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

l'intégrale dont il s'agit, et concevons que, en admettant les notations

de la Leçon précédente, on fasse

$$(6)\qquad E=\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx,$$

$$(7)\qquad F=\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx.$$

Soient, en outre, $A=\lim E$ la valeur générale et $B=\lim F$ la valeur principale de l'intégrale (5). La différence $A-B=\lim(E-F)$ sera équivalente à la somme des intégrales singulières

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx, \\ \displaystyle\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx, \\ \displaystyle\int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire à la limite dont s'approche la somme des intégrales (8), tandis que ε décroît indéfiniment. De plus, si l'on désigne par f_1, f_2, ..., f_m les limites vers lesquelles convergent les produits

$$(x-x_1)f(x),\quad (x-x_2)f(x),\quad \ldots,\quad (x-x_m)f(x),$$

tandis que leurs premiers facteurs convergent vers zéro, et si ces limites sont indépendantes des signes de ces premiers facteurs, on trouvera que la somme des intégrales (8) se réduit sensiblement à

$$(9)\qquad \mathrm{f}_1\,\mathrm{l}\frac{\mu_1}{\nu_1}+\mathrm{f}_2\,\mathrm{l}\frac{\mu_2}{\nu_2}+\ldots+\mathrm{f}_m\,\mathrm{l}\frac{\mu_m}{\nu_m}.$$

Lorsqu'on a $x_1=x_0$ ou $x_m=X$, la différence $A-B$ comprend une intégrale singulière de moins, savoir la première ou la dernière des intégrales (8).

Lorsqu'on suppose $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, les équations (6) et (7) doivent être remplacées par celles qui suivent :

$$(10)\quad E = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx,$$

$$(11)\quad F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx.$$

Dans la même hypothèse, il faut aux intégrales (8) ajouter les deux suivantes

$$(12)\qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx,$$

dont la somme sera sensiblement équivalente à l'expression

$$(13)\qquad \mathrm{f}\,l\frac{\mu}{\nu},$$

si le produit $xf(x)$ converge vers la limite f, tandis que la variable x converge vers l'une des deux limites $-\infty$, $+\infty$. Si une seule des deux quantités x_0, X devenait infinie, il ne faudrait conserver dans la différence A — B qu'une seule des intégrales (12).

Lorsque pour des valeurs infiniment petites de ε, et pour des valeurs finies ou infiniment petites des coefficients arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m, les intégrales singulières (8) et (12), ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtiennent ou des valeurs infinies, ou des valeurs finies, mais différentes de zéro, les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

sont évidemment infinies ou indéterminées. C'est ce qui arrive toutes les fois que les quantités f_1, f_2, ..., f_m ne sont pas simultanément nulles. Mais la réciproque n'est pas vraie, et il pourrait arriver que, ces quantités étant nulles toutes à la fois, les intégrales (8) et (12),

ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtinssent des valeurs finies différentes de zéro pour des valeurs infiniment petites des coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = \frac{1}{x \, \mathrm{l} x}$, le produit $x f(x)$ s'évanouira pour $x = 0$, et cependant l'intégrale singulière

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon\nu} \frac{dx}{x \, \mathrm{l} x} = \mathrm{l}\left(1 + \frac{\mathrm{l}\nu}{\mathrm{l}\varepsilon}\right)$$

cessera de s'évanouir pour des valeurs infiniment petites de ν.

Lorsque les intégrales singulières comprises dans la différence $A - B$ s'évanouissent toutes pour des valeurs infiniment petites de ε, quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$, on est assuré que la valeur générale de l'intégrale (5) se réduit à une quantité finie et déterminée. Soit en effet, dans cette hypothèse, δ un nombre très petit, et supposons ε choisi de manière que, pour des valeurs de $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$ inférieures à l'unité, chacune des intégrales (8) et (12) ait une valeur numérique inférieure à $\frac{1}{2(m+1)}\delta$. La valeur approchée de B, représentée par F, sera une quantité finie qui ne contiendra plus rien d'arbitraire; et, si l'on attribue aux coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu, \ldots, \mu_m, \nu_m$ des valeurs infiniment petites, E s'approchera indéfiniment de A, en demeurant compris entre les limites $F - \delta$, $F + \delta$. A sera donc compris entre les mêmes limites, et par conséquent on pourra trouver une quantité finie F qui diffère de A d'une quantité moindre qu'un nombre donné δ. On doit en conclure que la valeur générale A de l'intégrale (5) sera, dans l'hypothèse admise, une quantité finie et déterminée.

Des principes que nous venons d'établir on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — *Pour que la valeur générale de l'intégrale* (1) *soit finie et déterminée, il est nécessaire et il suffit que celles des intégrales singulières* (8) *et* (12) *qui se trouvent comprises dans la différence* $A - B$ *se*

réduisent à zéro, pour des valeurs infiniment petites de ε, *quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients* $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$.

Exemple. — Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fonction rationnelle. Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx$ conserve une valeur finie et déterminée, il sera nécessaire et il suffira : 1° que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas de racines réelles; 2° que le degré du dénominateur $F(x)$ surpasse, au moins de deux unités, le degré du numérateur $f(x)$.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

$$(1) \qquad \mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon)

$$(2) \qquad \mathcal{F}(x) = (x - x_0)\,f[x_0 + \theta(x - x_0)], \qquad \mathcal{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité, et de la formule (7) (vingt-troisième Leçon)

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha)$$

ou

$$(3) \qquad \mathcal{F}(x + \alpha) - \mathcal{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathcal{F}(x)$ sera non seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accrois-

sement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathcal{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=X$, il en sera de même de la fonction $\mathcal{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

$$\mathcal{F}'(x)=f(x). \tag{4}$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale

$$\int_x^X f(x)\,dx=-\int_X^x f(x)\,dx,$$

considérée comme fonction de x, a pour dérivée $-f(x)$. On aura donc

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(x)\,dx=f(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx}\int_x^X f(x)\,dx=-f(x). \tag{5}$$

Si aux diverses formules qui précèdent on réunit l'équation (6) de la septième Leçon, il deviendra facile de résoudre les questions suivantes.

Problème I. — *On demande une fonction $\varpi(x)$ dont la dérivée $\varpi'(x)$ soit constamment nulle. En d'autres termes, on propose de résoudre l'équation*

$$\varpi'(x)=0. \tag{6}$$

Solution. — Si l'on veut que la fonction $\varpi(x)$ reste finie et continue depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$, alors, en désignant par x_0 une valeur particulière de la variable x, on tirera de la formule (6) (septième Leçon)

$$\varpi(x)-\varpi(x_0)=(x-x_0)\,\varpi'[x_0+\theta(x-x_0)]=0$$

et, par suite,

$$\varpi\;x\;=\varpi(x_0), \tag{7}$$

ou, si l'on désigne par c la quantité constante $\varpi(x_0)$,

$$\varpi(x) = c. \tag{8}$$

Donc alors la fonction $\varpi(x)$ devra se réduire à une constante et conserver la même valeur c, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. On peut ajouter que cette unique valeur sera entièrement arbitraire, puisque la formule (8) vérifiera l'équation (6), quel que soit c.

Si l'on permet à la fonction $\varpi(x)$ d'offrir des solutions de continuité correspondantes à diverses valeurs de x, et si l'on suppose que ces valeurs de x, rangées dans leur ordre de grandeur, soient représentées par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, alors l'équation (7) devra subsister seulement depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = x_1$, ou depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2, \ldots,$ ou enfin depuis $x = x_m$ jusqu'à $x = +\infty$, selon que la valeur particulière de x représentée par x_0 sera comprise entre les limites $-\infty$ et x_1, ou bien entre les limites x_1 et $x_2, \ldots,$ ou enfin entre les limites x_m et ∞. Par conséquent, il ne sera plus nécessaire que la fonction $\varpi(x)$ conserve la même valeur depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, mais seulement qu'elle demeure constante entre deux termes consécutifs de la suite

$$-\infty, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \quad +\infty.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \varpi(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c - c_0}{2}\, \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} &+ \frac{c_2 - c_1}{2}\, \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2}} + \ldots \\ &+ \frac{c_m - c_{m-1}}{2}\, \frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}, \end{aligned} \right.$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ désignant des quantités constantes, mais arbitraires. En effet, dans ce cas, la fonction $\varpi(x)$ sera constamment égale à c_0 entre les limites $x = -\infty$, $x = x_1$; à c_1 entre les limites $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$; enfin à c_m entre les limites $x = x_m$, $x = \infty$.

Si l'on veut que $\varpi(x)$ se réduise à c_0 pour des valeurs négatives,

et à c_1 pour des valeurs positives de x, il suffira de prendre

$$(10) \qquad \varpi(x) = \frac{c_0 + c_1}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}}.$$

Problème II. — *Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation*

$$(11) \qquad dy = f(x)\,dx.$$

Solution. — Si l'on désigne par $F(x)$ une valeur particulière de l'inconnue y, et par $F(x) + \varpi(x)$ sa valeur générale, on tirera de la formule (11), à laquelle ces deux valeurs devront satisfaire,

$$F'(x) = f(x), \qquad F'(x) + \varpi'(x) = f(x)$$

et, par suite,

$$\varpi'(x) = 0.$$

D'ailleurs, il résulte de la première des équations (5) qu'on satisfait à la formule (11) en prenant $y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$. Donc la valeur générale de y sera

$$(12) \qquad y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \varpi(x),$$

$\varpi(x)$ désignant une fonction propre à vérifier l'équation (6). Cette valeur générale de y, qui comprend, comme cas particulier, l'intégrale (1) et qui conserve la même forme, quelle que soit l'origine x_0 de cette intégrale, est représentée dans le calcul par la simple notation $\int f(x)\,dx$, et reçoit le nom d'*intégrale indéfinie*. Cela posé, la formule (11) entraîne toujours la suivante

$$(13) \qquad y = \int f(x)\,dx,$$

et réciproquement, en sorte qu'on a identiquement

$$(14) \qquad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Si la fonction $F(x)$ diffère de l'intégrale (1), la valeur générale de y,

où $\int f(x)\,dx$, pourra toujours être présentée sous la forme

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \varpi(x), \tag{15}$$

et devra se réduire à l'intégrale (1), pour une valeur particulière de $\varpi(x)$ qui vérifiera en même temps l'équation (6) et la suivante :

$$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \varpi(x). \tag{16}$$

Si, de plus, les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont l'une et l'autre continues entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, la fonction $\mathfrak{F}(x)$ sera elle-même continue, et par suite $\varpi(x) = \mathfrak{F}(x) - \mathrm{F}(x)$ conservera constamment la même valeur entre ces limites, entre lesquelles on aura

$$\varpi(x) = \varpi(x_0),$$

$$\mathfrak{F}(x) - \mathrm{F}(x) = \mathfrak{F}(x_0) - \mathrm{F}(x_0) = -\mathrm{F}(x_0), \qquad \mathfrak{F}(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0). \tag{17}$$

Enfin, si dans l'équation (17) on pose $x = \mathrm{X}$, on trouvera

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx = \mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_0). \tag{18}$$

Il résulte des équations (15), (17) et (18) que, étant donnée une valeur particulière $\mathrm{F}(x)$ de y, propre à vérifier la formule (11), on peut en déduire : 1° la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$; 2° celles des deux intégrales définies $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$, dans le cas où les fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ restent continues entre les limites de ces deux intégrales.

Exemple. — Comme on vérifie l'équation $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ en prenant $y = \operatorname{arc\,tang} x$, et que les deux fonctions $\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{arc\,tang} x$ restent finies et continues entre les limites $x = -\infty$, $x = \infty$, on tirera des

formules (15), (17) et (18)

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + \varpi(x), \qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots.$$

Nota. — Lorsque dans l'équation (17) on veut étendre la valeur de x au delà d'une limite qui rend la fonction $f(x)$ discontinue, il faut ordinairement ajouter au second membre une ou plusieurs intégrales singulières.

Exemple. — Comme on satisfait à l'équation $dy = \frac{dx}{x}$ en prenant $y = \frac{1}{2}\mathrm{l}x^2$, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par μ, ν deux coefficients positifs, on trouvera, pour $x < 0$,

$$\int_{-1}^x \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{l}1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2,$$

et, pour $x > 0$,

$$\int_{-1}^x \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^x \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{l}1 + \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 + \int_{-\varepsilon}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}.$$